ヤコビ法

- **ヤコビ法**

  連立一次方程式の数値解法のうち、反復法の基本的なもの。
- **基本式**

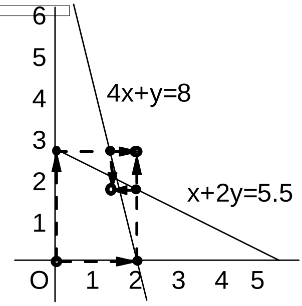
  $$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$
- **行列表現**

  $$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - Lx^{(k)} - Ux^{(k)}]$$
  $$= D^{-1}[b - (L+U)x^{(k)}]$$

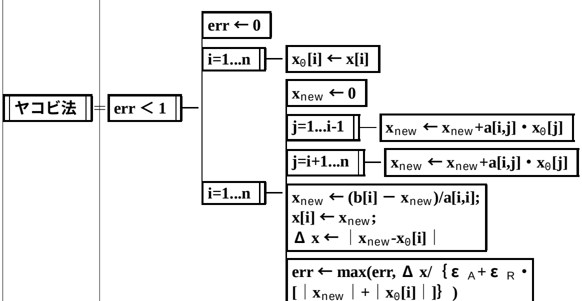
ヤコビ法の例

- $4x+y = 8$
- $x+2y=5.5$

原点から出発



ヤコビ法の手順



ガウス･ザイデル法

- **ヤコビ法との違い**

  右辺第1のΣの$x_j^{(k)}$を最新の値で計算
- **基本式**

  $$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$
- **行列表現**

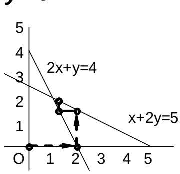
  $$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - L\,x^{(k+1)} - U\,x^{(k)}]$$
  $$x^{(k+1)} = (D+L)^{-1}[b - U\,x^{(k)}]$$

収束する例･しない例

- **例1**

  $2x+ y = 4$

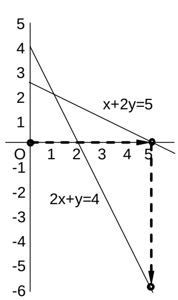
  $x +2y= 5$



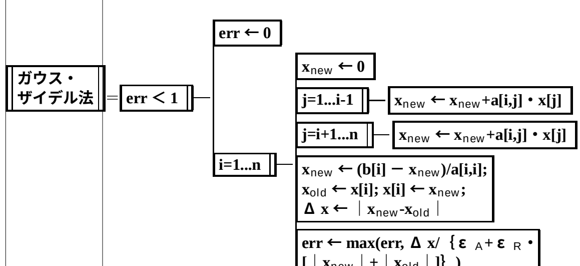
- **例2**

  $x +2y= 5$

  $2x+ y = 4$



ガウス･ザイデル法のPAD



反復行列H

- 反復法の基本式
  $x^{(k+1)} = Hx^{(k)}+c$ の形
  $H_J = -D^{-1}(L+U)$, $H_{GS} = -(D+L)^{-1}U$
- 収束状態
  $x^{(*)} = Hx^{(*)}+c$

よって
  $x^{(k+1)} - x^{(*)} = H(x^{(k)} - x^{(*)}) = \cdots = H^{k+1}(x^{(0)} - x^{(*)})$
- H は収束性のカギをにぎる行列

ベクトルと行列のノルム

- ベクトルxの大きさ: ノルム$\|x\|$
- 行列Aの大きさ: ノルム$\|A\|$
- 行列Aの最大値ノルム
  $\|A\|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|)$
- 固有値の絶対値最大の値: スペクトル半径ρ
  $\rho = \max_k |\lambda_k|$
- $\|A\|_\infty \geqq \rho$

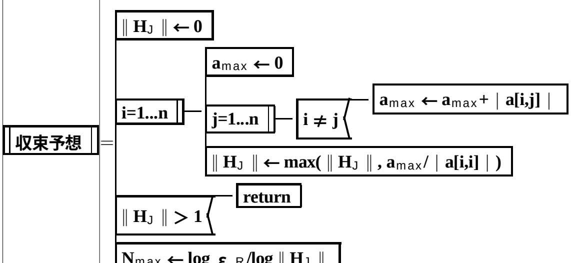
反復法の収束条件

- $\|H\| < 1$
- ヤコビ法の場合
  $\|H_J\| = \max_i (\sum_{j=1}^{n}{}' |a_{ij}/a_{ii}|) < 1$
- 「ヤコビ法が収束」ならば「ガウス･ザイデル法も収束」
  - ガウス･ザイデル法でもヤコビ法の収束条件を使用

反復回数の推定

- $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| \quad \rho^k \|x^{(1)}-x^{(0)}\|$
  $\varepsilon_R \quad \|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| / \|x^{(1)}-x^{(0)}\| \quad \rho^k$
  $k = N$ で収束 → $\varepsilon_R \quad \rho^N$
- $N = \log\varepsilon_R / \log\rho$
  ただし、ρ は一般に求めるのが面倒
  $1 > \|H\| \geqq \rho$ より
- $N_{\max} = \log\varepsilon_R / \log \|H\| \geqq N$

収束予想のPAD



例題4.5

- 例1
  $H_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
  $\|H_J\| = \max(0.5, 0.5) = 0.5 < 1$
- 例2
  $H_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
  $\|H_J\| = \max(2, 2) = 2 > 1$

例題4.8 反復回数の推定

- $N_{\max} = \log\varepsilon_R \;/\; \log \|H_J\|$
  $= \log 10^{-5} / \log 0.5 = 16$
- $N_J = \log\varepsilon_R \;/\; \log\rho_J$
  $= \log 10^{-5} / \log 0.5 = 16$
- $N_{GS} = \log\varepsilon_R \;/\; \log\rho_{GS}$
  $= \log 10^{-5} / \log 0.25 = 8$

例題4.9 収束予想

- $H_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
  $= -\begin{pmatrix} 0 & 3/9 & 5/9 \\ 2/9 & 0 & 6/9 \\ 4/9 & 3/9 & 0 \end{pmatrix}$
- $\|H_J\| = \max(8/9, 8/9, 7/9) = 8/9 < 1$
- $N_{\max} = \log 10^{-5} / \log(8/9) = 97$

誤差と条件数

- x: 真値、x': 近似値
  検算による残差: $r = b - Ax' = A(x - x')$
  $\|x - x'\| = \|A^{-1}r\| \leqq \|A^{-1}\|\,\|r\|$
- 一方、$\|b\| = \|Ax\| \leqq \|A\|\,\|x\|$
  より、$1/\|x\| \leqq \|A\| / \|b\|$

$\therefore\ \|x - x'\| / \|x\| \leqq \|A\|\,\|A^{-1}\| \cdot \|r\| / \|b\|$

- $\|A\|\,\|A^{-1}\|$: 条件数 cond(A) $\geqq 1$
  cond(A) >> 1 のとき悪条件、 1 のとき良

悪条件の例

- フォーサイスの例

$$\begin{cases} 0.780x + 0.563y = 0.217 \\ 0.913x + 0.659y = 0.254 \rightarrow 0.254001 \end{cases}$$

$x = 1, y = -1 \rightarrow x = 0.44, y = -0.22$

- 特異行列 cond(A) $\rightarrow \infty$

$$\begin{cases} x + (1/3)y = 4/3 \\ (1/3)x + (1/9)y = 4/9 \rightarrow 4/9 + 0.000001 \end{cases}$$

$x = 1, y = 1 \rightarrow$?

SOR法 (逐次過緩和法)

- 過緩和法と加速パラメータω
  基本式

$$\xi_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) / a_{ii}$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left(\xi_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right)$$

ω=1のとき、ガウス・ザイデル法

- SOR法
  ωを0〜2の範囲でうまく変化させ、最適な条件で反復収束させるもの。

SOR法のPAD