プログラミング演習1

― 課題4 数値解析法 ―

3.2 シンプソンの公式

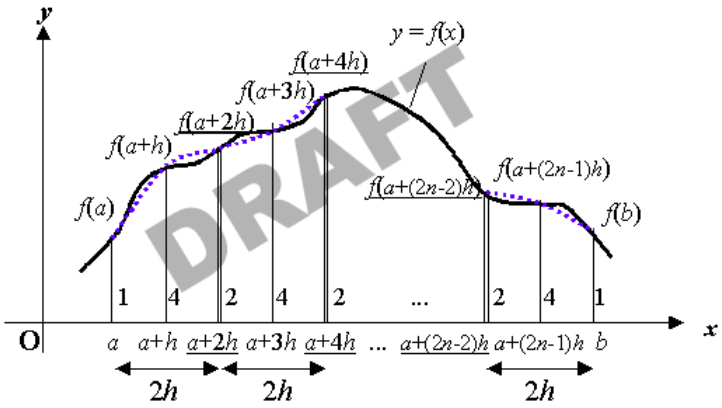
シンプソンの公式の1区間分の近似式は

$I = \int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq (h/3)[f(a) + 4f(a+h) + f(b)],\ h = (b-a)/2$

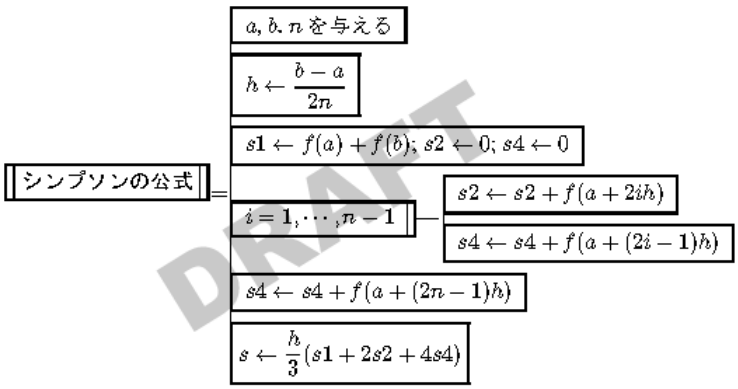
また、積分範囲を n 分割したときの複合公式は

$$I_2 = \frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih)],\quad h=\frac{b-a}{2n}$$

となる。



シンプソンの公式（複合公式）の基本部分のPADは、たとえば



となる。

台形公式とシンプソンの公式において、計算誤差が分割数の増加とともに減少する 速度を比較するためのプログラムを作成したい。仕様は以下のとおり。

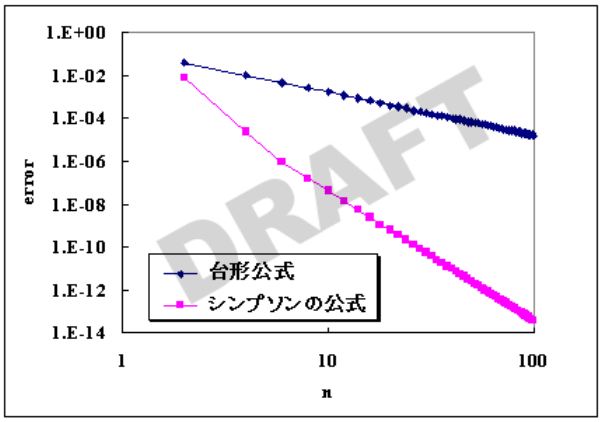
1. 台形公式、シンプソンの公式 を用いた数値積分ルーチンを それぞれ独立した倍精度関数 Trapez(), Simpson() として実現する。引数は積分の下限a, 上限b, 被積分関数$f(x)$, 分割数nとし、積分の近似値を戻り値で返す。
2. 2つの公式について、分割数n = 2～100 に対する 積分の近似値と 理論値の誤差の絶対値 |(理論値) − I| を出力する。ただし、シンプソンの公式の分割数は内部で(台形公式の)2倍になっているので、分割数を偶数で増加させ、(台形公式の)半分にして比較することにする。
3. 被積分関数は $f(x) = 4 / (1 + x^2)$、積分範囲は0～1 とする。(このとき、積分の理論値は π となる。)

以下のプログラム例は、上記の仕様を満たそうと書きはじめたものである。ただし、未完成である。

```
/*
    simp_tra.c
 */
#include &ltstdio.h>
#include &ltmath.h>
const double PI=3.14159265358979323846;

double f(double x)
{
    return 4.0 / (1 + x * x);   //  f(x) = 4/(1+x^2)
}
```

```
double Trapez(double a, double b, double (*f)(double), int n)
/*
    数値積分ルーチン（台形公式）
 */
{
    int i;
    double h, s;

    h = (b - a) / n;
    s = (f(a) + f(b)) / 2;
    for (i = 1; i < n; i++) s += f(a + i * h);
    return h * s;
}

double Simpson(double a, double b, double (*f)(double), int n)
/*
    数値積分ルーチン（シンプソンの公式）
 */
{
    int i;
    double h, s, s2, s4;

    h = ……;
    s = ……;
    s2 = s4 = ……;
    for (i = 1; i < n; i++) {
        s2 += ……;
        s4 += ……;
    }
    s4 += ……;
    s  += ……;
    return ……;
}

int main(void)
{
    int n;
    double a, b;

    a = 0; b = 1;
    printf("# 分割数, 台形公式, シンプソンの公式¥n");
    for (n = 2; n <= 100; n += 2) {
        printf("%5d, % .15e, % .15e¥n", n, ……, ……);
    }
    return 0;
}
// end of simp_tra.c
```

出力結果をグラフにした例を以下に示す。



Excelで表示しているグラフの縦軸を対数表示にするには、縦軸の目盛数字をダブルクリックして「軸の書式設定」メニューを呼び出し、「目盛」タブにおいて[対数目盛を表示する]をチェックする。横軸についても同様に行えば両対数グラフになる。

3.3 台形公式による二重積分

二重積分の式

$$I = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dxdy$$

は

$$I = \int_{a_2}^{b_2} I_x(y)\, dy, \quad I_x(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$$

と書くことにより、2段階の一重積分で表すことができる。

台形公式による二重積分を行い、総分割数(n^2)とともに 誤差が減少する様子をみるためのプログラムを作成したい。仕様は以下のと

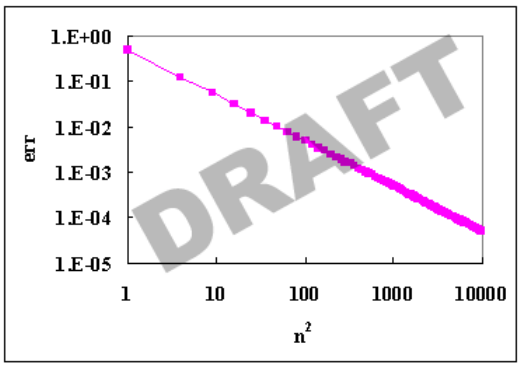
おり。

1. 一重積分、二重積分のルーチンをそれぞれ独立した倍精度関数 Trapez1D(), Trapez2D() として実現する。Trapez1Dの引数は積分の下限a, 上限b, 被積分関数$f(x, y)$, 変数y, 分割数n とし、積分の近似値を戻り値で返す。Trapez2D の引数は積分の下限a_1, a_2, 上限b_1, b_2, 非積分関数$f(x, y)$, 分割数n_1, n_2 とし、積分の近似値を戻り値で返す。
2. 分割数 $n_1 = n_2 = 1 \sim 100$ の 2 乗(総分割数)に対する 近似値 I および近似値と理論値との 誤差の絶対値 $|(e-1)^2 - I|$ を出力する。
3. 被積分関数は $f(x, y) = \exp(x+y)$、積分範囲はx, y ともに 0〜1 とする。(このとき、積分の理論値は $(e-1)^2$ となる。)

以下のプログラム例は、上記の仕様を満たそうと書きはじめたものである。ただし、未完成である。

```
/*
    trapez2d.c: 2重積分(台形公式)
    ∫0^1∫0^1 exp(x+y) dx dy
 */
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double x, double y)
{
    return exp(x + y);  //  f(x) = exp(x+y)
}

double Trapez1D(double a, double b, double (*f)(double, double), double y, int n)
/*
    積分ルーチン(台形公式): Ix(y) = ∫a1^b1 f(x,y) dx
 */
{
    int i;
    double h, s;

    h = (b - a) / n;
    s = (f(a, y) + f(b, y)) / 2;
    for (i = 1; i < n; i++) s += f(a + i * h, y);
    return h * s;
}

double Trapez2D(double a1, double b1, double a2, double b2, double (*f)(double, double), int n1, int n2)
/*
    2重積分ルーチン(台形公式): I = ∫a2^b2 Ix(y) dy
 */
{
    int i;
    double h2, s2;

    h2 = ……;
    s2 = ……;
    for (i = 1; i < n2; i++) s2 += ……;
    return ……;
}

int main(void)
{
    int n;
    double a1, a2, b1, b2, s0, s;

    a1 = a2 = 0; b1 = b2 = 1;
    s0 = exp(1)-1; s0 *= s0; // s0 = (e - 1)^2
    printf("# 分割数, 二重積分値, 誤差¥n");
    for (n = 1; n <= 100; n++) {
        s = Trapez2D(a1, b1, a2, b2, f, n, n);
        printf("%5d, % .15e, % .15e¥n", n*n, s, ……);
    }
    return 0;
}
// end of trapez2d.c
```

実行結果の誤差のグラフを両対数で描くと以下のようになる。



＜＜＜オプション課題＞＞＞

上記2つの未完成プログラム(simp_tra.c, trapez2d.c)のうち、どちらか一方を完成させ、実行結果から誤差のグラフを両対数で描画し報告せよ。実行結果については、最初の数行と最後の数行のみを報告し、途中は省略せよ。

余力のある人は、二重積分のプログラムにおいて、(a_1, a_2), (b_1, b_2), (n_1, n_2), (x, y) をそれぞれ配列にしてまとめ、再帰的な定義を用いるなどして m 重積分のルーチンを完成させてみよ。

【目次】|【1.】|【2.】|【3.のトップ】|【付録1】|【付録2】【付録3】